Le attività MERLO nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica

Le attività MERLO nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica

F. Arzarello[1], P. Carante[1], R. Kenett [1], O.Robutti[1], G. Trinchero [2, 3]

Abstract:
MERLO is an international project, which involves experts in different fields from five different countries. It focuses on a new pedagogical tool, based on the same shared meaning of semiotic representations in different sign systems. Although MERLO was born into a different context, it is well suited for Mathematics education: indeed many scholars, such as Duval, highlighted the importance of semiotic systems of representations and their coordination, as fundamental to learning in order to grasp the underlying meaning and to access to more abstract objects of knowledge. The main research purposes consist in applying the MERLO approach to the teaching and learning of Mathematics in the institutional context of Italian secondary schools. The objective is to provide teachers with new methods for teaching and exploring deep understanding of mathematics concepts, and to provide students with tools to determine their level of comprehension in formative assessment. The focus here is on the Italian research experience in the area of Mathematics education developed at the University of Turin and involving both researchers and teachers from secondary schools. MERLO activities were classified into four main conceptual nodes (numbers, geometry, relations and functions, data and predictions) and into sub-concepts typical of the Italian curriculum. The analysis of the research results obtained from the experiment conducted at an Italian secondary school in Turin allows comparisons about concepts and between teachers and students. This discussion involves the utilization of statistical data analysis and provides an opportunity to talk about Statistics as a tool for quantitative research.
Keywords: MERLO, formative assessment, teachers' professional development, mathematics and statistics education.

1. INTRODUZIONE

L'acronimo MERLO sta per "Meaning Equivalence Reusable Learning Object(s)" e indica un progetto di ricerca di livello internazionale, che vede la partecipazione di cinque diversi Paesi: i suoi maggiori esponenti sono Uri Shafrir e Masha Etkind in Canada ed in Russia, Ron Kenett in Israele e in Italia, Ferdinando Arzarello e Ornella Robutti in Italia, Theodosia Prodromou in Australia. Le origini del progetto risalgono agli anni '90 in Canada, dove Uri Shafrir e Masha Etkind hanno sfruttato lo sfondo teorico delle ricerche su conceptual thinking, peer cooperation e concept science (pensiero concettuale, cooperazione tra pari, scienza dei concetti) per introdurre un nuovo strumento metodologico e didattico, chiamato appunto MERLO. Come suggerisce il nome per esteso, MERLO è uno strumento per l'insegnamento e l'apprendimento riutilizzabile in diverse circostanze o contesti. Esso è basato sulla comunanza di significato delle diverse rappresentazioni di un concetto, che gli studenti sono chiamati a riconoscere. È utilizzabile in aula in attività di lavoro di gruppo con discussioni all'interno dei gruppi o della classe intera, o individualmente, o a casa, oppure in una valutazione di tipo formativo. Usato come attività di gruppo, esso permette di avviare discussioni sulla comunanza di significato di rappresentazioni diverse e in tal modo favorisce congetture, argomentazioni, giustificazioni. Usato nella valutazione formativa, siccome fornisce due tipi di punteggi, uno relativo alla correttezza della scelta di rappresentazioni relative allo stesso concetto e l'altro relativo alla giustificazione delle scelte fatte, consente all'insegnante di conoscere il livello di comprensione dei concetti dei propri allievi e agli studenti di sapere a quale punto sono del loro studio. In particolare, il secondo punteggio, quello relativo alla giustificazione, permette a studenti e docente di avere una chiara valutazione del livello di comprensione profonda di un concetto ("deep understanding"), al docente di stimolare miglioramenti nell'apprendimento, agli studenti di impegnarsi negli approfondimenti.

La versatilità dello strumento ne ha permesso l'applicazione in numerosi ambiti disciplinari e livelli scolastici; si può citare, a titolo di esempio, l'uso in ambito universitario presso la facoltà di Architettura di

[1] Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università di Torino, ferdinando.arzarello@unito.it, paola.carante@unito.it, ron@kpa-group.com, ornella.robutti@unito.it.
[2] IIS Santorre di Santarosa, Torino.
[3] Master Formatori in Didattica della matematica, UNITO, Torino, germana.trinchero@unito.it.

Toronto. Altri esempi nella formazione dei docenti iniziale e in servizio sia in Italia che in Svizzera, nell'insegnamento della Statistica, nei servizi di Sanità, in progetti educativi tramite l'uso di MOOC, in metrologia: si vedano gli articoli di Etkind et al. (2010), Shafrir and Kenett (2010), Shafrir and Kenett (2015), Arzarello et al. (2014), Arzarello et al. (2015).

L'uso dello strumento metodologico MERLO per l'insegnamento e apprendimento si presenta come una novità metodologica rispetto a una didattica di tipo tradizionale: esso, infatti, favorisce l'attenzione ai significati e ai contenuti concettuali; crea l'opportunità di discussione e scambio di idee tra studenti e con l'insegnante; permette la condivisione e il confronto di punti di vista differenti. Tutto questo si è dimostrato avere effetti benefici sull'apprendimento in varie discipline (Etkind et al., 2010).

La ricerca relativa alla metodologia MERLO è tuttora aperta e, come è stato detto, coinvolge studiosi in diversi Paesi del mondo. In Italia in particolare l'interesse è rivolto all'applicazione nel campo della didattica della matematica, in un contesto istituzionale di scuola secondaria di primo e secondo grado. Questo aspetto ha aperto nuovi problemi, questioni e domande di ricerca, a cui abbiamo cercato di rispondere e che verranno qui presentate (Arzarello et al., 2015).

2. GLI ITEM MERLO: ESEMPI E PROGETTAZIONE

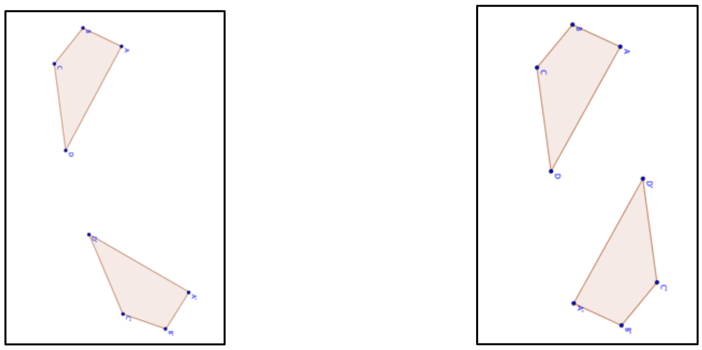
I due criteri teorici su cui si fonda lo strumento MERLO sono indicati con la terminologia coniata dagli ideatori e mantenuta tale:

- Surface Similarity
- Meaning Equivalence

Il primo criterio detto Surface Similarity indica una somiglianza solo superficiale tra due o più rappresentazioni dello stesso concetto: significa che esse "sembrano" simili, ossia sono simili solo all'apparenza esteriore, condividendo lo stesso sistema di segni (ad es. quello dell'algebra, quello dei grafici nel piano cartesiano, quello della lingua naturale scritta, o quello numerico, ecc.), ma sono diverse quanto a significato. Ad esempio, se si utilizza il linguaggio naturale, ci può essere Surface Similarity tra due affermazioni che utilizzano parole uguali disposte nello stesso ordine o in ordine simile, senza però esprimere lo stesso significato. Un celebre esempio può essere la polisemia della frase "una vecchia porta la sbarra". In questa frase, si possono leggere due affermazioni che utilizzano le stesse parole e che sono simili in apparenza, ma diverse nel significato a seconda che il termine 'porta' sia inteso come nome o come verbo all'interno della frase. Altri esempi sono dati dalle tre frasi seguenti, composte – nello stesso sistema di segni, quello linguistico – dalle stesse parole, ma con formulazioni che hanno significati diversi: "L'uomo guardava il ragazzo che giocava al pallone", "L'uomo che giocava al pallone guardava il ragazzo", "Il ragazzo guardava l'uomo che giocava al pallone".

Di seguito compare un altro esempio di Surface Similarity sempre in linguaggio naturale, ma in contesto matematico: "Al prezzo iniziale di una maglia è stato applicato uno sconto del 25% per ottenere il prezzo della maglia in saldo", "Aumentando del 25% il prezzo di una maglia in saldo si ottiene il suo prezzo prima dell'applicazione dello sconto". Anche in questo caso si può osservare l'utilizzo di parole uguali, che compaiono in ordine diverso e che esprimono un diverso significato matematico, come è facile rendersi conto applicando esempi numerici ai due calcoli.

Altri esempi di Surface Similarity che usano rappresentazioni diverse dal linguaggio naturale (rappresentazione rispettivamente grafica e simbolica) sono le seguenti:



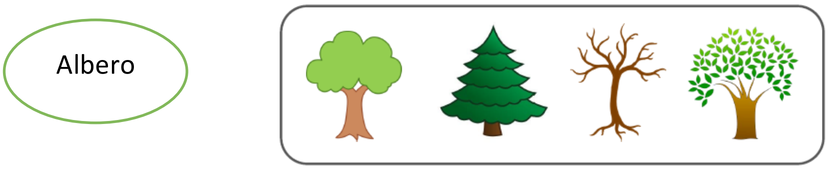
1. Figura: esempio di Surface Similarity

$$\frac{2}{7}a^2b : \frac{3}{28}a^2 \qquad \frac{2}{7}a^2b \cdot \frac{28}{3}a^2$$

2. Figura: esempio di Surface Similarity

Il secondo criterio, detto Meaning Equivalence, rappresenta un nodo cruciale su cui si fonda la struttura dello strumento MERLO, come ben si può intuire dal fatto che compare proprio nell'acronimo del nome. Questo criterio indica una equivalenza o comunanza di significato tra molteplici rappresentazioni in diversi sistemi di segni.

Un esempio di equivalenza di significato tra due rappresentazioni diverse dello stesso concetto, proveniente da un contesto non matematico (da Inbal Yahav's Conceptual Meaning Presentation):



3. Figura: esempio di Meaning Equivalence

Nel momento in cui si va a interpretare l'equivalenza di significato in ambito matematico la questione diventa molto delicata, poiché in matematica il termine equivalenza indica qualcosa di molto preciso dal punto di vista epistemologico. Pertanto possono sorgere dei problemi o delle ambiguità. Per questo motivo vorremmo precisare l'interpretazione del criterio Meaning Equivalence che è stata data nell'ambito del gruppo di ricerca in didattica della matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, composto da ricercatori e docenti universitari insieme con insegnanti e insegnanti-ricercatori di scuola secondaria di primo e secondo grado. La nozione di equivalenza di significato tra diverse rappresentazioni elaborata nel conteso di didattica della matematica non si attiene strettamente all'ambito epistemologico della disciplina (la matematica) e nello stesso tempo risulta particolarmente utile da un punto di vista didattico. L'obiettivo è disporre di uno strumento MERLO che sia adatto per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica nel contesto istituzionale della scuola italiana. In questo senso si può costituire un confine di significato (Boundary of Meaning - BOM), che racchiuda diverse rappresentazioni dello stesso concetto matematico le quali *condividono* uno stesso significato matematico, ma che non sono necessariamente equivalenti dal punto di vista epistemologico. Questa scelta ha ampliato la possibilità di elaborazione di variegate forme di condivisione di significato applicabili nella progettazione delle schede MERLO e utilizzabili nelle attività didattiche a diversi livelli scolari.

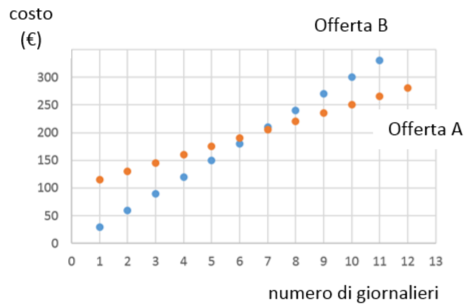
Ci spieghiamo con alcuni esempi: si tratta di rappresentazioni diverse che possono condividere lo stesso significato matematico nell'ambito di concrete situazioni scolastiche. Illustreremo così le differenti interpretazioni del criterio di Meaning Equivalence che abbiamo sviluppato in ambito matematico e in contesto didattico. In quanto segue useremo informalmente la distinzione ben nota e risalente a Frege tra segno (Zeichen), senso (Sinn), e significato (Bedeutung) (Frege, 2001) cioè tra una rappresentazione (per esempio: $(10)_2$, II, l'unico numero primo pari e positivo), il senso che essa suscita nel fruitore del segno (due in base 2, secondo, il 2 come numero primo), e l'oggetto matematico cui essa si riferisce (il numero due).

Esempio 1.

Questo esempio di item MERLO si ispira ad un quesito INVALSI (2012) e si riferisce ad un contesto di vita quotidiana. In particolare vengono presentate due offerte relative all'utilizzo di impianti di sci. Un giornaliero dà diritto a far uso di tutti gli impianti nel corso della singola giornata.

Offerta A: costo iniziale fisso 100 euro più 15 euro per ogni giornaliero.

Offerta B: 30 euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale.

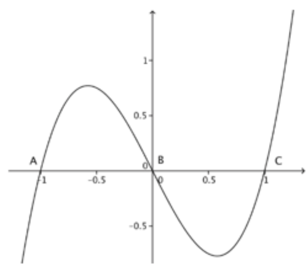


4. Figura: esempio di Meaning Equivalence

In questo esempio alla base del criterio detto Meaning Equivalence c'è quello che R. Duval definisce con il termine di "conversione", ossia trasformazioni di rappresentazione che consistono nel cambio di registro senza cambiare l'oggetto denotato: per esempio passare dalla notazione algebrica di una equazione alla sua rappresentazione grafica o passare da una relazione espressa in linguaggio naturale alla notazione che usa lettere (Duval, 2006). Nel nostro caso si passa dal linguaggio naturale a una rappresentazione grafica. Non solo la ricerca didattica, ma anche il quadro istituzionale italiano, dato dalle Indicazioni Nazionali, insiste sull'importanza delle diverse rappresentazioni: "Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati." (Indicazioni Nazionali per il liceo scientifico, pag. 38). In tal modo con l'uso dello strumento MERLO in contesto italiano si lavora in modo coerente con le richieste del quadro istituzionale del curriculum nazionale.

Esempio 2.

Gli zeri di una funzione reale *f* di variabile reale sono i valori x appartenenti al dominio per i quali *f*(x) = 0



A=(-1, 0); B=(0, 0); C=(1, 0)

5. Figura: esempio di Meaning Equivalence

In questo caso si osserva che il criterio di Meaning Equivalence non si può interpretare come una stretta equivalenza matematica (per esempio una doppia implicazione logica da una rappresentazione all'altra); esso si basa piuttosto sul legame che esiste tra la definizione di un concetto matematico ed un esempio che mostra il concetto in un'altra forma di rappresentazione. Questo tipo di rappresentazioni è frequentissimo in classe e fa parte delle usuali pratiche didattiche degli insegnanti, in quanto ha importanti ripercussioni sull'apprendimento dei concetti legati alle funzioni in contesti vari di rappresentazione.

Gli insegnanti del gruppo di ricerca MERLO hanno condiviso la forte utilità e anzi la necessità sul piano didattico di esempi, per far "vedere qualcosa agli allievi" nel momento in cui si tratta qualche concetto matematico. L'importanza degli esempi nell'apprendimento della matematica non è nuova e viene messa in luce da diversi autori, più o meno recenti. Si possono citare Vergnaud (1990), il quale sostiene che il significato di un oggetto matematico, da un punto di vista didattico e psicologico, non può essere ridotto semplicemente alla sua definizione, ma anche Skemp (1987), che scrive di come i concetti di ordine superiore a quelli che le persone hanno normalmente, non possano essere comunicati loro attraverso una definizione, ma solo adattando per loro una collezione di esempi opportuna. Una prospettiva più recente sull'uso degli esempi nell'insegnamento e apprendimento della matematica si trova in Bills et al. (2006), che riassume e rielabora contributi precedenti.

Esempio 3.

La pendenza di una retta è il rapporto tra la variazione delle ordinate e l'incremento dell'asse delle ascisse di due suoi punti.

6. Figura: esempio di Meaning Equivalence

In questo caso il criterio di Meaning Equivalence si basa su una analogia tra il concetto matematico di pendenza di una retta e la pendenza della strada in un contesto reale.

L'uso di analogie è una risorsa che può essere sfruttata per introdurre o chiarire concetti, rendendo anche una lezione più stimolante grazie appunto al legame che si viene a creare con un contesto differente (Behar, Grima, Marco-Almagro, 2013). La letteratura al riguardo è molto vasta (Donnelly e McDaniel 1993, 2000; Martin, 2003): molti autori riconoscono ed evidenziano l'importanza delle analogie e del ragionamento analogico nei processi di insegnamento e apprendimento.

Gli esempi appena descritti illustrano come la Meaning Equivalence si basi su un concetto più ampio che non la pura equivalenza logica. Un tentativo di definizione, che ha una base puramente empirica, è di considerare la Meaning Equivalence come quella relazione che si crea tra diverse rappresentazioni suscettibili della stessa interpretazione coerenti in un preciso contesto di insegnamento-apprendimento della matematica. L'interpretazione si basa oltre che sull'equivalenza logica, anche sull'assunzione di una rappresentazione come esempio dell'altra, su analogie, su considerazioni euristiche, su implicazioni oltre che biimplicazioni. L'equivalenza di significato è così il risultato delle pratiche didattiche in classe (Kilpatrick, Hoyles, & Skovsmose, 2005, pp. 10-11), che comprendono possibilmente l'equivalenza logica, ma non si riducono a questa in quanto comprendono tutte le risorse messe in atto dall'insegnante per rendere i suoi allievi compartecipi del senso matematico delle diverse rappresentazioni che usano. Si tratta di qualcosa di molto vicino ai "giochi linguistici" nel senso di Wittgenstein, secondo cui

> "seguire una regola è impresa impossibile da realizzare privatamente, poiché una regola è intelligibile, comprensibile, solo all'interno dell'insieme delle modalità di comportamento comune agli individui di una certa comunità, ambiente culturale, in cui vige. È una pratica acquisita in base all'interazione sociale (giochi linguistici)." (Adattato da Wittgenstein, "Ricerche Filosofiche", 1967)

Così nell'Es. 3 l'analogia, nell'Es. 2 l'esemplificazione sono strumenti didattici che l'insegnante può usare come giochi linguistici per aiutare gli allievi a comprendere rispettivamente la nozione di pendenza di una retta e di zero di una funzione, in quanto, come sopra ricordato la definizione matematica rigorosa spesso non basta né per la comprensione né per produrre capacità operative di utilizzo del concetto o della regola oggetto di definizione. Il processo è simile a quello con cui si imparano e comprendono le regole di un gioco giocando e non soltanto leggendo ne la descrizione verbale.

Basandoci sulle due nozioni di Surface Similarity e di Meaning Equivalence, riusciamo così a costruire un generico item MERLO con la seguente struttura:

- un Target Statement, indicato come TS, che presenta un concetto importante all'interno del curriculum di matematica ed incorpora alcune sue caratteristiche;

- 4 altre rappresentazioni collegate al TS dalla condivisione o meno dei criteri di Meaning Equivalence e Surface Similarity.

Quattro sono le tipologie di rappresentazioni che si possono presentare nella scheda:

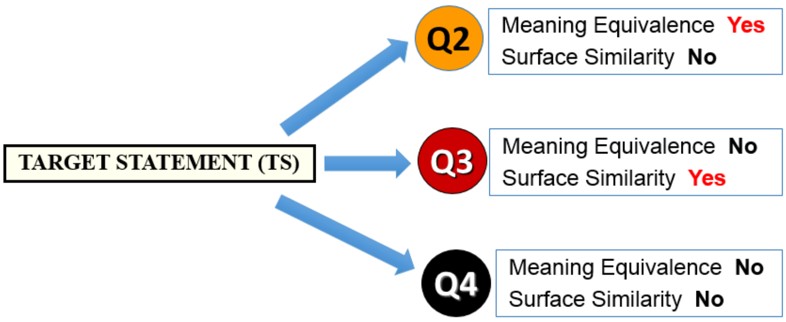
Q1 - sono le rappresentazioni che condividono con il TS entrambi i criteri, sia Surface Similarity, sia Meaning Equivalence;

Q2 - sono le rappresentazioni che condividono con il TS solo il criterio detto Meaning Equivalence;

Q3 - sono le rappresentazioni che condividono con il TS solo il criterio detto Surface Similarity;

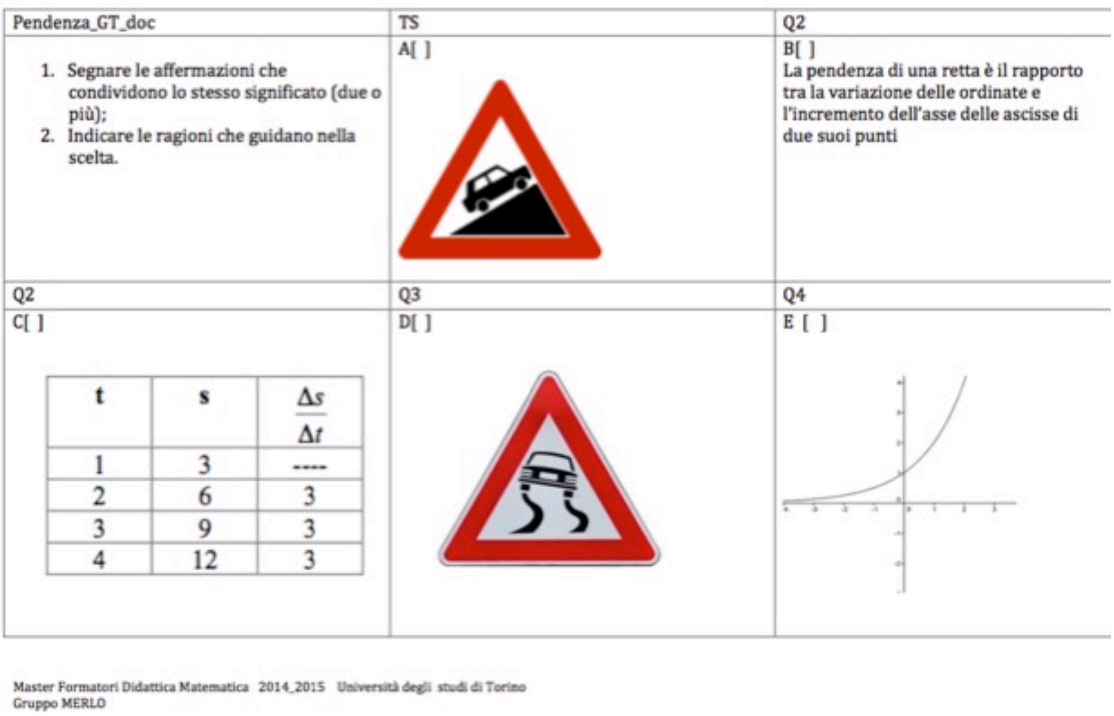
Q4 - sono le rappresentazioni che non condividono con il TS nessuno dei due criteri, né Meaning Equivalence né Surface Similarity.

L'applicazione nella pratica ha mostrato che l'uso di rappresentazioni di tipi Q1 rende l'attività troppo semplice (Etkind at al., 2010). Le rappresentazioni di tipo Q1 vengono quindi evitate ed è quindi possibile riassumere le diverse tipologie di rappresentazioni (Robutti, 2016) in una scheda MERLO nel seguente schema (Figura 7):



7. Schema: tipologie di rappresentazioni in scheda MERLO

Si riporta un esempio (nelle versione per il docente) di scheda MERLO (Scheda 8) in cui compaiono le diverse tipologie di rappresentazioni per rendere l'idea.



Pendenza_GT_doc	TS	Q2
1. Segnare le affermazioni che condividono lo stesso significato (due o più); 2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.	A[ ]	B[ ] La pendenza di una retta è il rapporto tra la variazione delle ordinate e l'incremento dell'asse delle ascisse di due suoi punti
Q2	**Q3**	**Q4**
C[ ]	D[ ]	E [ ]

t	s	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
1	3	----
2	6	3
3	9	3
4	12	3

Master Formatori Didattica Matematica 2014_2015 Università degli studi di Torino
Gruppo MERLO

8. Esempio di item MERLO

L'esempio di item MERLO si presenta nella versione per docenti, con l'indicazione della tipologia (TS o diversi tipi di Q) di ciascuna affermazione o rappresentazione. Nella versione per gli studenti ovviamente non compare la tipologia e la loro posizione è variabile, con l'attenzione che sia sempre presente almeno una rappresentazione di tipo Q2, oltre al TS naturalmente. In tal modo ci sono sempre almeno due rappresentazioni equivalenti dal punto di vista del significato. Agli alunni non è rivelato il TS, il quale potrebbe non comparire nel primo riquadro. La richiesta per gli studenti non si basa semplicemente sull'analisi delle rappresentazioni considerate singolarmente (ed in riferimento al TS), ma presuppone un ragionamento che va oltre all'analisi e si fonda sulla messa in relazione di rappresentazioni e significati matematici. La consegna per gli studenti è così formulata:

1. Segnare le rappresentazioni (due o più) che condividono lo stesso significato matematico (nel senso della Meaning Equivalence tra TS e Q2)
2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.

La consegna per gli studenti si compone quindi di due parti: la prima parte richiede di esplorare, analizzare e interpretare rappresentazioni in molteplici sistemi di segni allo scopo di riconoscere e individuare significati matematici comuni, espressi in diversi registri (alla Duval) e modalità (come definizione, come esempio, come analogia…); mentre la seconda parte richiede di produrre una argomentazione che giustifichi le proprie scelte.

È interessante osservare che le rappresentazioni proposte in una scheda non presentano mai situazioni contraddittorie (per esempio in una 3+2 = 4 e nell'altra 3/0 = 6), che sarebbero banalmente equivalenti da un punto di vista logico e che potrebbero quindi falsare le risposte degli studenti: lo studente non deve scegliere le risposte corrette, ma confrontarne i significati e indicare quelle che condividono il significato.

La progettazione di una scheda MERLO richiede quindi una grande attenzione ai significati matematici coinvolti all'interno del quadro istituzionale oltre che dal punto di vista epistemologico, un'ampia conoscenza delle pratiche didattiche usate per introdurli e utilizzarli nella classe: non basta quindi la conoscenza dei concetti matematici, ma occorre un'ampia dimestichezza con le pratiche didattiche e quindi si tratta di un lavoro che si può ottenere solo con la collaborazione tra ricercatori e insegnanti.

Per l'assegnazione del punteggio, quando lo studente sceglie correttamente i riquadri TS e Q2, cioè individua correttamente tutti i riquadri che condividono lo stesso significato, il punteggio MERLO è 5. Il punteggio viene decurtato di uno ogni volta che lo studente sceglie un riquadro Q3 o Q4 da far corrispondere al TS, oppure ogni volta che tralascia di segnare i riquadri Q2 o il TS. Il punteggio diminuisce e può anche ridursi a 0. Ovvero, il punteggio 5 è ottenuto tramite la somma tra il punteggio p (dato da TS e Q2 che si corrispondono nella meaning equivalence) e il punteggio q=5-p (dato dai riquadri non segnati, perché Q3 e Q4, che quindi non spartiscono alcun significato col TS).

Riassumendo, per ogni riquadro vengono assegnati 1 o 0 punti con il seguente criterio:

1 punto se lo studente segna un riquadro TS, Q2, o non segna un riquadro Q3, Q4;

0 punti se lo studente non segna un riquadro TS, Q2, o segna un riquadro Q3, Q4.

Come vedremo, le schede MERLO sono utili per la valutazione formativa, in quanto processo interno alla costruzione in classe del sapere intorno a un concetto. Il riconoscimento da parte degli allievi di quesiti di tipo Q2, Q3, Q4, se scorrette (in tutto o in parte) sono fonte di conoscenza per gli insegnanti sulla loro interpretazione delle rappresentazioni del concetto matematico oggetto della prova. È un'informazione molto più interessante rispetto alla semplice conoscenza che l'insegnante ha da una prova sommativa.

3. LA RICERCA E LA FORMAZIONE INSEGNANTI

Il progetto MERLO ha due aspetti significativi che lo caratterizzano dal punto di vista della ricerca.

Da una parte si tratta di un progetto di ricerca didattica focalizzato su vari temi: l'equivalenza di significato, il design di attività di apprendimento e di valutazione formativa, la formazione dei docenti come processo di interazione tra comunità diverse, l'osservazione dei processi cognitivi degli studenti coinvolti in attività MERLO.

Dall'altra si tratta anche di un percorso di formazione degli insegnanti, iniziale e in servizio, per proporre la metodologia MERLO per un suo utilizzo in classe con il fine di fornire attività utili sia all'apprendimento degli allievi che alla valutazione formativa.

Questi due aspetti sono profondamente intrecciati e si integrano e potenziano mutuamente, creando come conseguenza una proficua interazione tra le comunità coinvolte: i ricercatori, gli insegnanti-ricercatori, i formatori degli insegnanti, i docenti in formazione iniziale e in servizio, gli studenti universitari (dottorandi, di laurea magistrale o triennale) eventualmente coinvolti per compilare le loro tesi. Queste comunità si amalgamano, si incontrano, si dividono a seconda del compito da svolgere: ricerca, progettazione didattica, formazione, sperimentazione, creando una fruttuosa collaborazione tra le persone, uno scambio di competenze e la nascita di nuovi profili professionali. Il tutto avviene nel conteso istituzionale italiano, in cui il progetto MERLO negli ultimi due anni si è venuto a collocare.

La collaborazione tra Arzarello e Robutti, del Dipartimento di Matematica di Torino, con i già citati ideatori della metodologia MERLO ha permesso di contestualizzare questo progetto alla situazione italiana, creando nuove schede. La comunità di progettazione e sperimentazione di schede MERLO si è subito ampliata con docenti e formatori. Più precisamente, inizialmente sono stati coinvolti nella fase di progettazione di schede già esistente in inglese, provenienti dalla scuola russa e in quella successiva di sperimentazione alcuni docenti in servizio presso la scuola secondaria di primo o di secondo grado, partecipanti al Master di II livello "Formatori in didattica della matematica", tenuto presso il Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino. Durante il secondo anno del master (A.A. 2014/2015) un gruppo di sette insegnanti ha così deciso di partecipare attivamente al progetto, iniziando a ideare loro stessi nuove schede MERLO, contestualizzate all'ambiente italiano, somministrandole dapprima agli altri docenti del master, per avere un riscontro preliminare, e poi agli alunni delle proprie classi. Le fasi di elaborazione e somministrazione hanno prodotto un lungo processo di revisione e arrangiamento non solo della singola scheda, ma anche della struttura principale ideata da Etkind e Shafrir nonché della metodologia di applicazione nelle classi con gli studenti. Inoltre si è molto discusso sul significato matematico delle rappresentazioni Q2, Q3 e Q4 e sulle affermazioni da inserire nei corrispondenti riquadri della scheda MERLO.

Il passaggio dalla fase di progettazione, descritta nel paragrafo precedente, a quella di sperimentazione, è avvenuto nuovamente nell'ambito del quadro istituzionale italiano: il progetto "Piano Nazionale Lauree Scientifiche" ha infatti dato l'opportunità di organizzare un modulo formativo per docenti della scuola superiore, realizzato nell'anno scolastico 2014/15. Il modulo si chiama "Adotta una scuola" e consiste nella partecipazione di tutti i docenti di matematica di una scuola di Torino al progetto di sperimentazione delle schede prodotte nella fase di design dai docenti del Master. Questa fase di sperimentazione non solo è stata una grande opportunità per i docenti della scuola, ma anche per i formatori, che essendo gli stessi ideatori delle schede MERLO, hanno avuto la possibilità di ricevere utili informazioni dai docenti e dagli studenti delle classi.

L'uso di schede MERLO nella formazione docenti e nella sperimentazione non si è però esaurito in questo modulo formativo, ma ha avuto numerose altre applicazioni, come ad esempio nella formazione iniziale dei docenti (TFA e PAS in Italia, SUPSI in Svizzera), nella formazione in servizio (convegni e seminari nazionali e internazionali, conferenze e seminari presso le scuole).

3.1 – Contesto scolastico: Progetto Lauree Scientifiche "Adotta una scuola

L'Istituto su cui è stato attivato il modulo "Adotta una scuola" è stata la secondaria di secondo grado "Istituto di Istruzione Superiore Santorre di Santarosa" di Torino , con un'utenza eterogenea per provenienza e preparazione. Fra gli studenti sono anche presenti B.E.S.[4].

A tale progetto hanno partecipato i seguenti attori:

- *formatori*: due docenti del Master, una dottoranda, che ha seguito il gruppo e due laureande
- *fruitori del progetto*: tre docenti dell'Istituto (di cui uno su una classe prima, che è stata comunque inserita nella sperimentazione).
- *classi coinvolte*: una seconda ed una prima dell' indirizzo linguistico, e una seconda dell' indirizzo tecnico.

(si specifica che le quattro classi afferiscono a quattro docenti diversi, ma uno di loro ha svolto funzione di formatore)

Si sono alternate due importanti fasi nella formazione:

- *fase docente*: breve formazione sulla metodologia relativamente ai quesiti PRE MERLO[5] e quesiti MERLO.

---

[4] Studenti con Bisogni Educativi Speciali

[5] I quesiti PRE MERLO consistono in schede nelle quali gli studenti trovano solo due caselle e devono decidere se i loro contenuti condividono stessi significati, cioè se pur contenenti rappresentazioni di tipo

- *fase studente*: un pre-test che è consistito nella somministrazione del fascicolo completo del test INVALSI 2013/14 a tutte le classi seconde, per poter delineare la situazione di partenza.
Una volta svolto il pre-test, tutti i fascicoli sono stati raccolti e consegnati al gruppo di lavoro del progetto che ha provveduto a tabulare le risposte fornite dagli studenti.
In base al programma svolto nella propria classe, ciascun insegnante ha potuto decidere tra due alternative:
- stralciare alcuni quesiti del fascicolo e comunicarlo agli studenti della propria classe appena prima della somministrazione e a uno dei formatori (cosa che normalmente non è possibile fare nella prova ufficiale INVALSI).
- non stralciare alcun quesito, allo scopo di vedere come se la cavavano gli studenti, segnalando comunque alle tutor i quesiti relativi ad argomenti non trattati.

Il Pre-test MERLO è stato somministrato solo alle classi seconde dei docenti che hanno aderito al progetto: due del liceo linguistico una dell'indirizzo tecnico ed una prima linguistico. Il test MERLO è stato somministrato solo alle classi aderenti al progetto**.** A queste due fasi è poi seguita la prova INVALSI ufficiale ministeriale del 12 maggio 2015 su tutte le classi seconde dell'Istituto.

Questa la proposta di scansione temporale presentata agli insegnanti della scuola "adottata":

• entro la fine di gennaio 2015: somministrazione fascicolo INVALSI 2013/2014 a tutte le classi seconde dell'istituto;
• in data 10 febbraio 2015: incontro di formazioni docenti;
• tra il 10 marzo e il 24 marzo: sperimentazione PRE MERLO e MERLO in classe;
• nel mese di aprile: secondo incontro con i docenti per avere un riscontro del loro punto di vista;
• in data 12 maggio 2015: somministrazione fascicolo INVALSI 2014/2015 per tutte le classi seconde dell'istituto;
• infine: restituzione di alcuni dati significativi e delle schede.

3.1.1 - Fasi e tempi attuati

La proposta è stata pienamente rispettata nei tempi e nei protocolli: i docenti sono stati impegnati in tre ore di formazione, poi sono stati somministrati i pre-test di un'ora e successivamente le attività MERLO di due ore.

Le schede PRE MERLO sono state preparate da due laureande, dopo aver esaminato con uno dei formatori i programmi delle classi del primo biennio, analizzando anche le criticità emerse nel pre-test INVALSI e sentite le esigenze dei docenti curricolari, in modo da trovare delle intersezioni sugli argomenti chiave e tenendo presente le linee guida Nazionali per i Licei "*…Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale)…"* e le indicazioni per gli Istituti tecnici ed i piani di lavoro dei singoli docenti e i principali ambiti su cui vertono le prove INVALSI.

Alla luce di ciò sono stati scelti i seguenti argomenti: pendenza, frazioni, retta, successioni, proporzionalità inversa, circonferenza, percentuali, funzioni, soluzioni ed equazioni, potenze, annullamento del prodotto

Tali schede sono poi state collegate con le schede MERLO.

3.1.2 - Metodologia di lavoro

Nella prima fase sono state proposte agli studenti delle schede PRE MERLO.

Agli studenti è stato richiesto di lavorare prima singolarmente e poi a gruppi pervenendo (ove possibile) ad una decisione condivisa. Infine si è concluso con una discussione in classe mediata dall'insegnante. Tale attività non è scaturita in una valutazione sommativa.

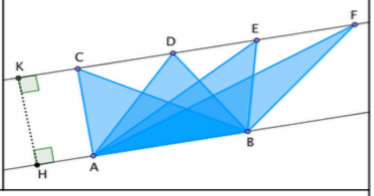
Si riportano qui di seguito due esempi di scheda PRE MERLO, nella quale viene richiesto di indicare se le due rappresentazioni condividono lo stesso significato oppure no e motivare la risposta.

---

diverso queste individuano lo stesso concetto matematico (esempi di queste schede si trovano nel paragrafo relativo alla metodologia di lavoro).

TS	Q3
$\frac{2}{7}a^2b : \frac{3}{28}a^2$	$\frac{2}{7}a^2b \cdot \frac{28}{3}a^2$
Le due rappresentazioni condividono lo stesso significato? Spiega il ragionamento che hai seguito per dare la risposta.	
Piano Lauree Scientifiche	Università degli Studi di Torino - Dipartimento di Matematica

9. Scheda: esempio di item PRE MERLO

TS	Q2
Siano date due rette parallele. I triangoli aventi base comune AB appartenente ad una di queste rette e il terzo vertice sull'altra sono equivalenti.	
Le due rappresentazioni condividono lo stesso significato? Spiega il ragionamento che hai seguito per dare la risposta.	
Piano Lauree Scientifiche	Università degli Studi di Torino - Dipartimento di Matematica

10. Scheda: esempio di item PRE MERLO

3.2 – Primi risultati della sperimentazione

I dati qui di seguito commentati si riferiscono a due classi seconde con 11 quesiti MERLO. Tutti i dati sono stati elaborati con il software MINITAB 17.2.1 (www.minitab.com).

I risultati danno la possibilità di capire l'impatto della modalità di lavoro in gruppi e le differenze di punteggio MERLO tra classi parallele con docenti differenti. Queste differenze indicano diversità nel "conceptual understanding" degli allievi nelle classi considerate.

Sfruttando la modalità di attribuzione dei punteggi precedentemente descritta (paragrafo 2), si procede per prima cosa a calcolare il punteggio medio per ogni scheda MERLO e successivamente si svolge una analisi (ANOVA) per studiare le differenze tra i concetti su cui sono centrate le diverse schede.

La seguente tabella riporta un elenco in cui si possono vedere i vari concetti (11 in totale) su cui sono centrate le diverse schede MERLO. I concetti sono elencati per ordine di difficoltà (crescente) riscontrata dagli studenti delle diverse classi a cui sono stati proposti. Si osserva che il numero totale N di risposte ottenute non è costante; tuttavia la variabilità nelle risposte ci fa supporre che il gruppo di studenti presenti e che hanno risposto non si sia auto selezionato. La conferma ci è giunta dagli insegnanti stessi, che hanno affermato che la non costanza del numero N è dovuta ad assenze di studenti.

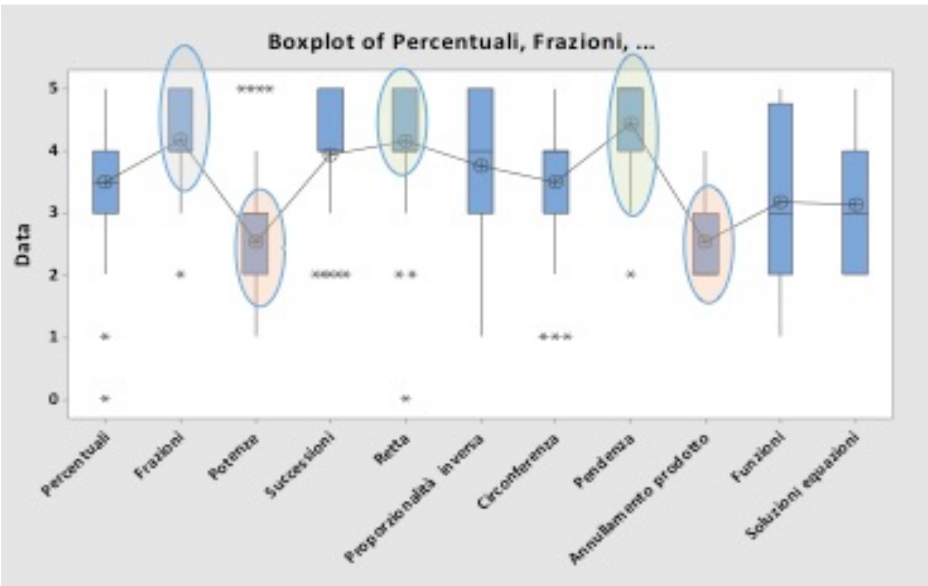
Factor	N	Mean	Grouping
1. Pendenza	18	4.444	A
2. Frazioni	29	4.172	A B
3. Retta	38	4.158	A B
4. Successioni	43	3.930	A B C
5. Proporzionalità inversa	42	3.762	A B C
6. Circonferenza	44	3.500	B C
7. Percentuali	42	3.500	B C
8. Funzioni	24	3.167	C D
9. Soluzioni equazioni	23	3.130	C D
10.Potenze	49	2.531	D
11.Annullamento prodotto	19	2.526	D

11. Tabella: analisi 11 Schede MERLO

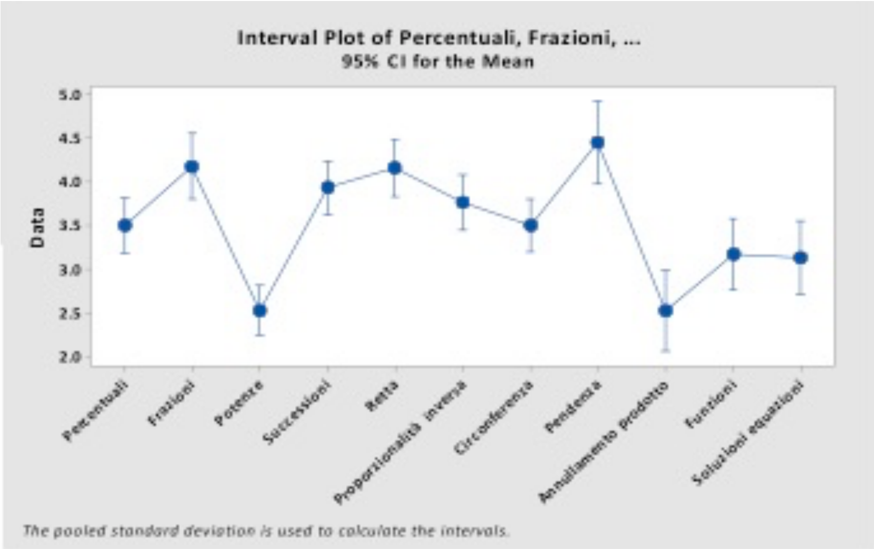
Analizziamo ora più in dettaglio la situazione con un'analisi ANOVA con comparazione multipla di Tukey (Tabella 11) dove gli argomenti valutati con gli item MERLO sono stati classificati in tre classi: alta (1-3), media (4-7) e bassa (8-11) comprensione. L'analisi di Tukey ha creato automaticamente gruppi A-D che danno una indicazione di differenze con rilevanza statistica (Kenett and Zacks, 2014). I concetti che non condividono una lettera (Tabella 11) sono significativamente diversi. A tal proposito osserviamo che:

- ci sono concetti con un livello relativamente alto di comprensione come pendenza, frazioni, retta,
- ci sono concetti con livello relativamente basso come funzioni, soluzione equazioni, potenze, annullamento del prodotto.

Nelle Figure 12 e 13 di seguito invece abbiamo una visione globale dei risultati, che mettono in evidenza la variabilità delle distribuzioni delle valutazioni delle schede MERLO. Anche da queste figure emergono gli argomenti con livello di comprensione più alto e più basso di cui si è appena discusso.



12. Figura: box plot ed errori medi e standard



13. Figura: interval plot dei punteggi MERLO, per argomento

Possiamo cercare di dare una spiegazione di tali differenze? Perché due concetti sono decisamente più bassi? Si può congetturare che per potenze ed annullamento del prodotto bisogna trovare un altro modo di presentare l'argomento. Ad esempio gli studenti hanno risposto ai quesiti MERLO ma in classe che tipo di didattica è stata usata? Le variabili possono essere molte. Non siamo in grado di dire realmente quali siano.

E' una domanda aperta su cui però vale la pena di riflettere ed il MERLO ci dà una valutazione formativa in tal senso che permette di dare spunti di riflessione e discussione.

Una idea per ulteriori e future analisi potrebbe essere quella di capire se nelle risposte c'è l'effetto della classe.

In questo paragrafo ci si sofferma, a titolo di esempio, sulla scheda relativa alla "proporzionalità inversa" che risulta di media difficoltà.

La Figura 14 riporta una analisi descrittiva dove per ogni classe rispettivamente di 23 e 19 studenti ci sono i 7 parametri fondamentali.

Variable	Propinvers_class	N	N*	Mean	StDev	Minimum	Q1	Median
Proporzionalità inversa	1	23	0	3.478	1.201	1.000	3.000	3.000
	2	19	0	4.105	0.809	2.000	4.000	4.000

Variable	Propinvers_class	Q3	Maximum
Proporzionalità inversa	1	5.000	5.000
	2	5.000	5.000

14. Figura: analisi comparativa multipla di Schede MERLO (descrizione statistica dei punteggi MERLO per "Proporzionalità inversa" compiuta in due classi parallele)

Dalla Figura 14 si osserva che la proporzionalità inversa ha ottenuto differenze significative tra le due classi: la classe 2 composta da 19 studenti ha ottenuto un punteggio più alto della classe 1 composta da 23 studenti.

Dal confronto fra classi abbiamo visto la classe 2 ha avuto risultati migliori rispetto alla classe 1: lo si evince da un p-value che è 0,05 e pertanto significativo (Figura 15). Le ragioni di questo risultato possono essere diverse, come ad esempio l'influenza del docente o la composizione della classe.

```
Two-sample T for Proporzionalità  inversa

Propinvers_class   N   Mean  StDev  SE Mean
1                 23   3.48   1.20     0.25
2                 19  4.105  0.809     0.19




Difference = μ (1) - μ (2)
Estimate for difference:  -0.627
95% CI for difference:  (-1.258, 0.004)
T-Test of difference = 0 (vs ≠): T-Value = -2.01  P-Value = 0.051  DF = 38
```

15. Figura: test statistico delle differenze per "Proporzionalità inversa" dei punteggi MERLO in due classi parallele

Un altro fattore interessante da analizzare riguarda l'impatto della modalità di lavoro in gruppi, a confronto con la modalità di risoluzione individuale. La Figura 16 mostra che, nel caso particolare della proporzionalità inversa, i dati di gruppo non hanno avuto punteggi significativamente più alti di quelli individuali e questo è successo per ogni classe. Solo la classe 1 ha avuto un maggiore miglioramento del punteggio per gruppi su questo item (Figura 16).

```
                           N  Mean  StDev  SE Mean
Proporzionalità  inversa  42  3.76   1.08     0.17
Propinvers Group          11  4.18   1.08     0.33

Difference = μ (Proporzionalità  inversa) - μ (Propinvers Group)
Estimate for difference:  -0.420
95% CI for difference:  (-1.199, 0.359)
T-Test of difference = 0 (vs ≠): T-Value = -1.15  P-Value = 0.268  DF = 15
```

16. Figura: test statistico delle differenze tra punteggi individuali e punteggi di gruppo sulla valutazione MERLO di "Proporzionalità inversa"

In generale risulta interessante analizzare e confrontare i punteggi medi degli studenti presi singolarmente e per gruppi. La Figura 17 mette in luce i risultati del confronto condotto su 6 degli 11 argomenti (solo in 6 casi si è proposto agli studenti di lavorare anche in gruppi, mentre negli altri casi si è lavorato soltanto singolarmente).

```
                     N    Mean   StDev   SE Mean
Percentuali         42    3.50   1.02       0.16
Percentuali Group   13    4.000  0.913      0.25

Frazioni             29   4.172  0.848      0.16
Frazioni Group        7   4.714  0.488      0.18

Potenze              49   2.53   1.17       0.17
Potenze Group        13   3.538  0.967      0.27

Successioni          43   3.930  0.910      0.14
Successioni Group    12   4.583  0.900      0.26

Retta                38   4.16   1.03       0.17
Retta Group          13   4.615  0.506      0.14

Circonferenza        44   3.500  0.952      0.14
Circon Group         13   4.154  0.987      0.27
```

17. Figura: descrizione statistica di punteggi relativi alle Schede MERLO ottenuti da due classi parallele in cui la valutazione di gruppo ha dato un punteggio significativamente più alto di quello individuale

Nella Figura 17 possiamo osservare che relativamente agli argomenti percentuali, frazioni, potenze, successioni, retta, circonferenza, i gruppi hanno totalizzato un punteggio più alto rispetto a quelli individuali. Si osserva anche che la media dei punteggi individuali presenta la massima differenza dalla media dei punteggi di gruppo per l'argomento potenze. L'ulteriore analisi (Figura 18) permette di concludere che, per le potenze, i risultati che si hanno lavorando singolarmente sono diversi da quelli che si ottengono lavorando in gruppo. In Figura 18 dal valore del p-value possiamo vedere che il gruppo ha dato risultati migliori rispetto ai singoli: la differenza è evidente.
La valutazione di gruppo è importante ed è utile per una valutazione di tipo formativo.
Pertanto possiamo verificare che la "peer instruction" da risultati migliori per le potenze (Figura 18).

```
Two-sample T for Potenze vs Potenze Group

               N   Mean  StDev  SE Mean
Potenze       49   2.53   1.17     0.17
Potenze Group 13  3.538  0.967     0.27

Difference = μ (Potenze) - μ (Potenze Group)
Estimate for difference:  -1.008
95% CI for difference:  (-1.664, -0.352)
T-Test of difference = 0 (vs ≠): T-Value = -3.18  P-Value = 0.004  DF = 22
```

18. Figura: test statistico delle differenze per "Potenze" dei punteggi Merlo tra valutazioni individuali e di gruppo

A questo punto si è visto che in alcune situazioni, come quella della proporzionalità inversa, la classe è importante; in altre situazioni, come quella delle potenze, il lavoro di gruppo è importante.

Si conclude infine riprendendo l'analisi relativa alla proporzionalità inversa, esaminando per ogni classe gli esiti rispetto al lavoro individuale e di gruppo.

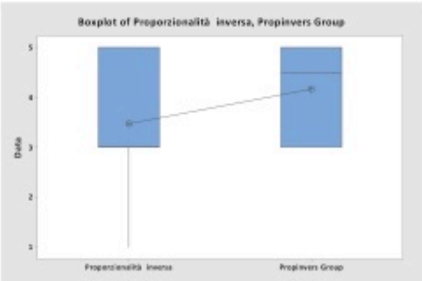
Class 1

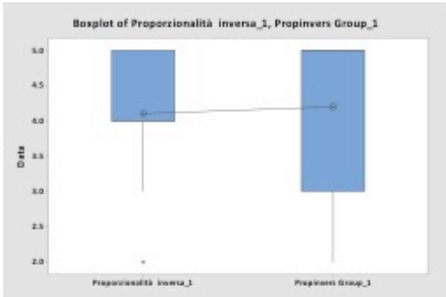
Proporzionalità inversa, Propinvers Group

```
                          N   Mean  StDev  SE Mean
Proporzionalità  inversa  23   3.48   1.20     0.25
Propinvers Group           6  4.167  0.983     0.40

Difference = μ (Proporzionalità  inversa) - μ
(Propinvers Group)
Estimate for difference:  -0.688
95% CI for difference:  (-1.759, 0.382)
T-Test of difference = 0 (vs ≠): T-Value = -1.46  P-
Value = 0.180  DF = 9
```

Class 2

```
                          N   Mean  StDev  SE Mean
Proporzionalità  inversa  19  4.105  0.809     0.19
Propinvers Group_1         5   4.20   1.30     0.58

Difference = μ (Proporzionalità  inversa_1) - μ
(Propinvers Group_1)
Estimate for difference:  -0.095
95% CI for difference:  (-1.794, 1.604)
T-Test of difference = 0 (vs ≠): T-Value = -0.15  P-
Value = 0.884  DF = 4
```





31

19. Figura: test statistico delle differenze per "Proporzionalità inversa" dei punteggi Merlo tra valutazioni individuali e di gruppo, per classe

Per quanto riguarda la proporzionalità inversa, non c'è una differenza significativa fra il punteggio dei gruppi e quello dei singoli. C'è una variabilità dei risultati ampia e quindi ciò significa una variabilità alta di risposte differenti.

È importante notare nella figura 19 che non c'è grande differenza fra singoli e gruppi in entrambe le classi. Possiamo fare delle congetture al riguardo. Ci possiamo chiedere perché non vediamo differenze fra i risultati dei gruppi e dei singoli.

Il docente può investigare…. È una domanda aperta.

La proporzionalità inversa è normalmente un concetto difficile quindi possiamo ipotizzare che gli allievi tendano a dare interpretazioni in diversi modi sia singolarmente sia a gruppi e quindi ci possono essere "diversi modi" di sbagliare perché probabilmente ci sono modalità di rappresentazioni diverse.

4. CONCLUSIONI

In questo lavoro si sono presentati i risultati di un lavoro di ricerca e sperimentazione in alcune classi della scuola secondaria superiore che ha coinvolto ricercatori universitari, docenti-ricercatori della scuola, insegnanti e studenti della laurea in Matematica.

Si è applicato il metodo di valutazione formativa MERLO. Esso si basa sulla varietà di rappresentazioni necessarie per fare riferimento ai concetti matematici, che, essendo per loro natura astratti, devono essere nominati attraverso una varietà di ostensivi. Da quelli algebrici, a quelli grafici, a quelli verbali ecc. Tali rappresentazioni possono condividere il significato dell'oggetto rappresentato anche se la loro rappresentazione materiale può apparire diversa (Meaning Equivalence), oppure al contrario possono condividere la rappresentazione solo a livello superficiale (Surface Similarity), mentre il loro significato è diverso e quindi non si ha equivalenza di significato.

Nella prima parte del lavoro si è illustrato questa distinzione evidenziando che l'equivalenza di significato è più ampia della stretta equivalenza logica tra enunciati matematici e si basa piuttosto sui significati condivisi generati in classe dalle pratiche didattiche.

Questa distinzione permette di generare schede in cui sono presenti 5 diverse rappresentazioni, alcune condividono una equivalenza di significato, altre solo una somiglianza superficiale. Gli allievi devono individuare le tipologie di relazioni che esistono fra le varie rappresentazioni della scheda e argomentare il perché delle loro scelte.

Nel lavoro si illustrano due aspetti metodologici con cui i quesiti MERLO possono entrare nelle pratiche didattiche: come strumento di formazione e di riflessione sul significato delle prove di valutazione per gli insegnanti coinvolti nella preparazione dei quesiti (§ 3); come strumento di lavoro con gli studenti ai fini di una valutazione formativa (§ 3.1, 3.1.1, 3.1.2, 3.2). Infatti gli studenti devono risolvere i quesiti MERLO non solo indicando quali rappresentazioni condividono un'equivalenza di significato e quali no, ma devono anche spiegarne il perché. Quindi l'insegnante può ottenere informazioni dirette sul modo con cui i suoi studenti interpretano le rappresentazioni matematiche, accedendo così a dati che di solito le/gli sono preclusi. Inoltre, discutendo con gli studenti, le loro risposte possono fare eventualmente evolvere i significati che essi attribuiscono ai segni della matematica verso il loro significato scientificamente condiviso.

Esiste poi un terzo risultato delle prove MERLO, più tradizionalmente legato alle prove di valutazione: i dati ottenuti da queste possono essere oggetto di analisi e discussione con gli insegnanti delle classi in cui sono state somministrate.

Le modalità della prova, che prevede sia risposte individuali sia risposte di gruppo, permette analisi fini dei risultati su basi statistiche, confrontando i risultati ottenuti in classi diverse, come pure i risultati individuali e di gruppo. Esse sono illustrate nell'ultima parte del lavoro e costituiscono un punto di partenza per un'ulteriore discussione tra e con gli insegnanti e con gli allievi nelle cui classi le prove sono state somministrate. Questo tipo di discussione implica elementi statistici che potrebbero essere un'opportunità di parlare di statistica in classe in un modo alternativo.

Al momento la parte del lavoro fin qui svolto non permette di offrire evidenze di ricerca qualitativa sull'effetto che le schede hanno sugli studenti o sugli insegnanti. Sarà proprio l'analisi delle discussioni in classe con allievi e insegnanti, i cui dati non sono qui riportati, a permettere un'analisi più approfondita dei dati quantitativi illustrati. Tale studio permetterà di completare la ricerca di tipo quantitativo ivi contenuta.

La ricerca si presenta comunque come un importante strumento metodologico, che coinvolge gli insegnanti in momenti diversi delle prove: nella loro preparazione, nella loro somministrazione e nell'interpretazione dei risultati ottenuti. Come tale diminuisce enormemente il divario che rischia sempre di esserci tra momenti valutativi puramente sommativi e valutazione formativa. Inoltre la tipologia dei Quesiti MERLO permette di rendere accessibili difficoltà e fraintendimenti nel modo di pensare stesso degli allievi, rendendo accessibili loro modalità di pensiero difficilmente analizzabili con altri strumenti che non siano l'intervista individuale, troppo dispendiosa nell'economia dei tempi di una classe.

Dal punto di vista teorico la metodologia MERLO costituisce un innegabile progresso rispetto al quadro semiotico di R. Duval, in quanto, assumendolo, permette di rendere operativi dei concreti schemi di indagine, che nel lavoro del ricercatore francese sono meno presenti.

Ulteriori ricerche e riflessioni sono invece ancora richieste per giungere a una sistemazione meno empirica della nozione di Meaning Equivalence: attualmente il gruppo di lavoro sta studiando la distinzione chomskiana tra struttura superficiale e struttura profonda in un quadro semiotico non ristretto al solo linguaggio naturale. Ma ciò è al di là del contenuto di questo articolo.

Ringraziamenti

Si ringraziano gli insegnanti del Gruppo MERLO del Master di secondo livello "Progetto Formatori in Didattica della Matematica" presso il Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell' Università di Torino.

Bibliografia

Arzarello, F., Kenett, R.S., Robutti, O., Shafrir, U. (2014). The application of concept science to the training of teachers of quantitative literacy and statistical concepts, UNITO technical report.

Arzarello, F., Kenett, R. S., Robutti, O., Shafrir, U., Prodromou, T., & Carante, P. (2015). Teaching and assessing with new methodological tools (MERLO): A new pedagogy? Proceedings of the IMA International Conference on

Barriers and Enablers to Learning Maths: Enhancing Learning and Teaching for All Learners, M.A. Hersh and M. Kotecha Editors, 10-12th June, Glasgow, UK.
Behar, R., Grima, P., Marco-Almagro, L. (2013). Twenty-Five Analogies for Explaining Statistical Concepts. The American Statistician, 67:1, 44-48.
Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In Novotnà, J., Moraovà, H., Kràtkà, M. & Stehlìkovà, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 126-154. Prague: PME.
Donnelly, C. M., & McDaniel, M. A. (1993). Use of Analogy in Learning Scientific Concepts. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 19, 975-987.
Donnelly, C. M., & McDaniel, M. A. (2000). Analogy With Knowledgeable Learners: When Analogy Confers Benefits and Exacts Costs. Psychonomic Bulletin and Review, 7, 537-543.
Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.
Etkind, M., Kenett, R. S., & Shafrir, U. (2010). The evidence-based management of learning: Diagnosis and development of conceptual thinking with meaning equivalence reusable learning objects (MERLO). In Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8). Ljubljana, Slovenia: Academic Press.
Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung ("Senso e significato"), in Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 25-50. Tradotto in Italiano in: G. Frege, Senso, funzione e concetto, Laterza, Bari, 2001, a cura di C. Penco e E. Picardi.
Kenett, R.S. and Zacks, S. (2014) Modern Statistics with Applications in R, MINITAB and JMP, John Wiley and Sons, 2014.
Kilpatrick, J., Hoyles, C., and Skovsmose, O. (Eds.), 2005. Meaning in Mathematics Education. Berlin, New York: Springer.
Martin, M. A. (2003). It's Like…You Know: The Use of Analogies and Heuristics in Teaching Introductory Statistical Methods. Journal of Statistics Education, 11, 2.
Robutti, O. (in press). Mathematics teacher education in the institutions: new frontiers and challenges from research. In E. Robotti & C. Sabena (Eds.), *Proceedings of the 67th Conference of the Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*. Aosta, Italy, 20-24 July 2015.
Shafrir, U., & Kenett, R. S. (2010). Conceptual thinking and metrology concepts. Accreditation and Quality Assurance, 15(10), 585–590.
Shafrir, U., & Kenett, R. S. (2015). Concept Science Evidence-Based MERLO Learning Analytics (with U. Shafrir) in Handbook of Applied Learning Theory and Design in Modern Education, IGI Global, 2015.
Skemp, R. R. (1987). The psycology of learning mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. Recherches en Didactiques des Mathématiques 10 (2/3), 133-170.
Wittgenstein, L. (1967). Ricerche Filosofiche, Torino: Einaudi. Traduzione di Philosophische Untersuchungen, edito da G.E.M. Anscombe e R. Rhees, Oxford, 1953.